M 9.1

Quadratwurzeln

$\sqrt{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, die quadriert a ergibt: $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Die Zahl a unter der Wurzel heißt **Radikand**: $\sqrt{a}$

Quadratwurzeln sind nur für positive Zahlen definiert: $a \geq 0$

$\sqrt{25} = 5;$ $\sqrt{81} = 9;$ $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0{,}5;$ $\sqrt{0{,}0081} = 0{,}09;$ $\sqrt{-4} =$

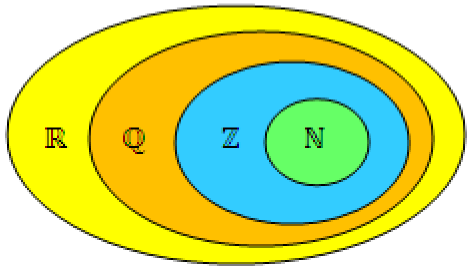
M 9.2

Reelle Zahlen

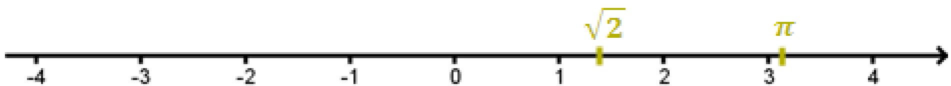
Jeder unendliche nicht periodische Dezimalbruch stellt eine **irrationale Zahl** dar.

$\sqrt{2}$; $-\sqrt{7}$; π; $0{,}12345\ldots$

Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die **Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen**.



Jede reelle Zahl besitzt einen Bildpunkt auf der Zahlengeraden und jedem Punkt auf der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl.



M 9.3

Rechenregeln für Wurzeln

$\cdot$	✓
$:$	✓
$+$	⚡

Multiplikationsregel: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

Divisionsregel: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Vorsicht: Man darf Wurzeln nicht auf die einzelnen Glieder einer Summe verteilen!

$$\cancel{\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

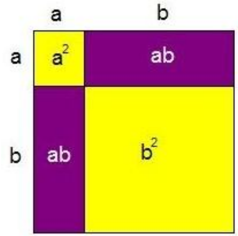
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6; \qquad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

Anwendungen:

1) Teilweises Radizieren: $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
2) Nenner rational machen: $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
3) Summen und Differenzen von Wurzeln: $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

M 9.4

Binomische Formeln



1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ***Plus-Formel***
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ***Minus-Formel***
3. Binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ ***Plus-Minus-Formel***

$(5x+y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$; $(0{,}5a-1)^2 = 0{,}25a^2 - a + 1$; $(1-m)(1+m) = 1 - m^2$

Anwendungen:

1) Ausmultiplizieren (Produkte werden zu Summen):

$$\left(3+2\sqrt{3}\right)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 12\sqrt{3} + 12 = 21 + 12\sqrt{3}$$

2) Faktorisieren (Summen werden zu Produkten):

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x+1)(3x-1)$$
$$\sqrt{4 + x^2 - 4x} = \sqrt{(2-x)^2} = |2-x|$$

M 9.5

n-te Wurzel

$\sqrt[n]{a}$ ist diejenige nicht negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Die Zahl n heißt **Wurzelexponent**: $\sqrt[n]{a}$

n-te Wurzeln sind nur für positive Zahlen definiert: $a \geq 0$

$\sqrt[3]{8} = 2;\quad \sqrt[4]{81} = 3;\quad \sqrt[5]{3125} = 5;\quad \sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3;\quad \sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4}$

Die Gleichung $x^n = a$ kann zwei, eine oder keine Lösung haben:

	n gerade	**n ungerade**
$a > 0$	$L = \{-\sqrt[n]{a};\ \sqrt[n]{a}\}$	$L = \{\sqrt[n]{a}\}$
$a = 0$	$L = \{0\}$	$L = \{0\}$
$a < 0$	$L = \{\,\}$	$L = \{-\sqrt[n]{a}\}$

$x^4 = 2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[4]{2};\ \sqrt[4]{2}\}$

$x^3 = -2 \Rightarrow L = \{-\sqrt[3]{2}\}$

M 9.6

Potenzen mit rationalen Exponenten

Für $a > 0$ gilt: $\qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \qquad 8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4; \qquad 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}; \qquad 9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9^3}} = \frac{1}{27}$

Rechenregeln

Multiplizieren bei gleicher Basis:

Exponenten addieren

$$4^{\frac{1}{6}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

Multiplizieren bei gleichem Exponenten

$$5^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{3}} = (5 \cdot 8)^{\frac{1}{3}} = 40^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{5}$$

Potenzieren von Potenzen

Exponenten multiplizieren

$$\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleicher Basis

Exponenten subtrahieren

$$4^{-\frac{1}{3}} : 4^{\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} = 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Dividieren bei gleichem Exponenten

$$2^{\frac{1}{3}} : 54^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2}{54}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Summen und Differenzen

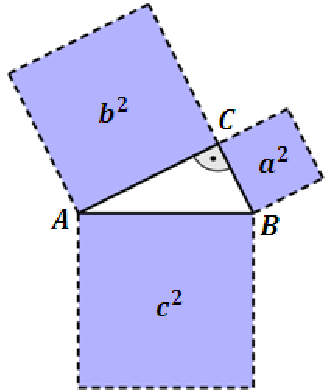
Zusammenfassen ***nur bei gleichartigen Termen*** möglich!

$$7a^{\frac{1}{3}} - 3a^{\frac{1}{3}} = 4a^{\frac{1}{3}}$$

M 9.7

Satz des Pythagoras

In jedem rechtwinkligen Dreieck haben die Quadrate über den Katheten zusammen den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über der Hypotenuse.



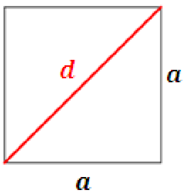
$$\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2}$$

Anwendungen:

Diagonale im Quadrat

$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

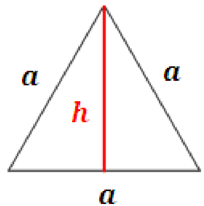
$\Leftrightarrow \quad d = a\sqrt{2}$



Höhe im gleichseitigen Dreieck

$h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

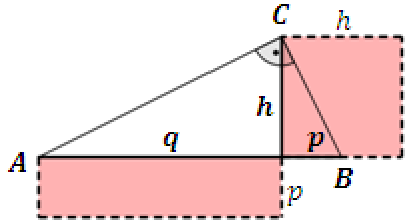


M 9.8

Kathetensatz und Höhensatz

Höhensatz

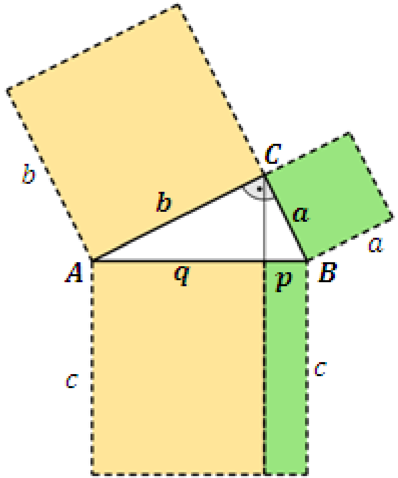
In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Höhe den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.



$$h^2 = p \cdot q$$

Kathetensatz

In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über einer Kathete den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus der Hypotenuse und dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.



$$a^2 = c \cdot p \qquad b^2 = c \cdot q$$

M 9.9

Quadratische Funktionen: Die Parabel

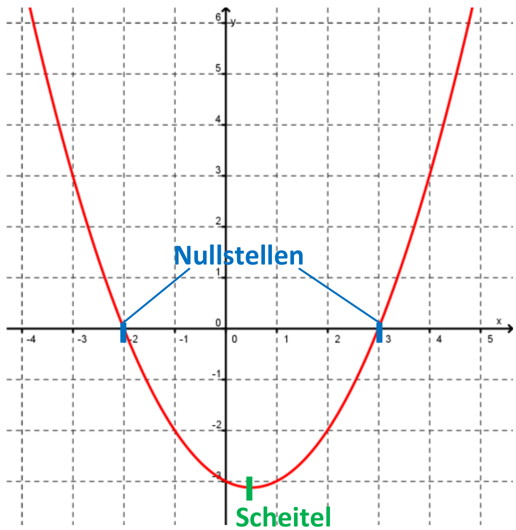
Der Graph einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt **Parabel**.

Die Parabel ist für

- $a > 0$ nach oben geöffnet.
- $a < 0$ nach unten geöffnet.

Ist $a = 1$ oder $a = -1$ heißt der Graph **Normalparabel**.

Der tiefste bzw. höchste Punkt heißt **Scheitel** der Parabel.



M 9.10

Quadratische Funktionen: Scheitelform

Jede quadratische Funktion lässt sich durch **quadratische Ergänzung** in die **Scheitelpunktform** $f(x) = a(x-d)^2 + e$ bringen.

$\Rightarrow$ Scheitel $(d|e)$

für $a > 1$ enger als die Normalparabel

für $a < 1$ weiter als die Normalparabel

Um d in x-Richtung verschoben

Um e in y-Richtung verschoben

$$\boldsymbol{f(x) = 0,5x^2 + 2x + 5}$$

$f(x) = 0{,}5(x^2 + 4x + 10) =$

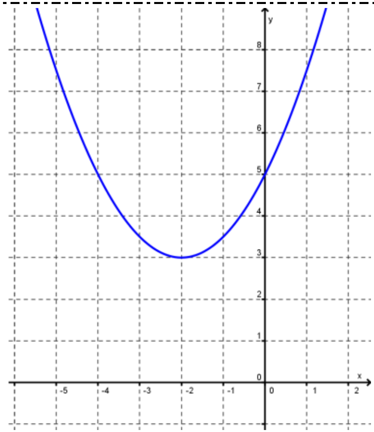
$= 0{,}5\left(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 10\right) =$ **Quadratische Ergänzung**

$= 0{,}5[(x+2)^2 - 2^2 + 10] =$

$= 0{,}5[(x+2)^2 + 6] =$

$= 0{,}5(x+2)^2 + 3$

$\Rightarrow S(-2|3)$



M 9.11

Quadratische Gleichungen

Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ heißen **quadratische Gleichungen.**

- Ihre Lösungen sind die Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Sind x_1 und x_2 die Lösungen, so kann man die Funktion schreiben als $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (Linearfaktorzerlegung)

Lösungsformel („Mitternachtsformel"):

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Der Term unter der Wurzel $b^2 - 4ac$ heißt **Diskriminante D.** Er gibt an, wie viele Lösungen die Gleichung besitzt.

$D > 0$	zwei Lösungen
$D = 0$	eine Lösung
$D < 0$	keine Lösung

$$3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 7}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{12}{6} = 2, x_2 = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

M 9.12

Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein Zufallsexperiment, das aus mehreren Teilexperimenten besteht, nennt man **mehrstufiges Zufallsexperiment.**

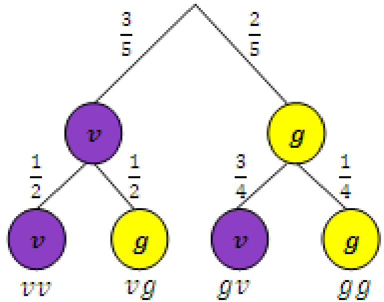
1. **Pfadregel**
   Die **Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses** ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.
2. **Pfadregel**
   Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die zugehörigen Ergebnisse.

Aus einer Urne mit zwei gelben und drei violetten Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.

$\Omega = \{gg, gv, vg, vv\}$

$P(vv) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$

$P(zwei\ gleiche\ Kugeln) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}$



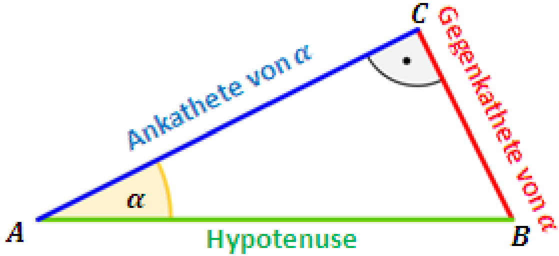
M 9.13

Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

$$sin\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete\ von\ \alpha}{Hypotenuse}$$

$$tan\alpha = \frac{Gegenkathete\ von\ \alpha}{Ankathete\ von\ \alpha}$$



Beziehungen: $sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$; $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $tan\alpha = \frac{sin\alpha}{cos\alpha}$

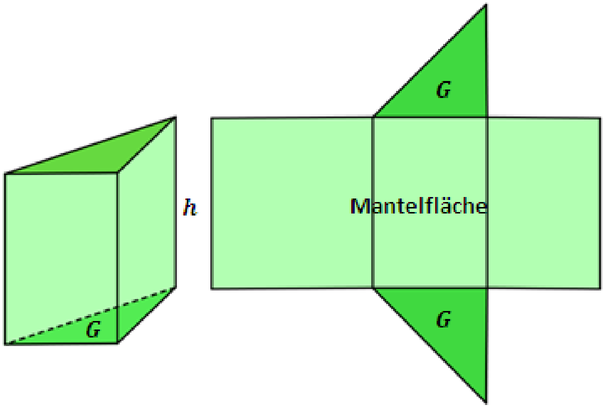
Werte:

α	0°	30°	45°	60°	90°
sinα *Merkhilfe*	0 $\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1 $\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cosα	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tanα	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	existiert nicht

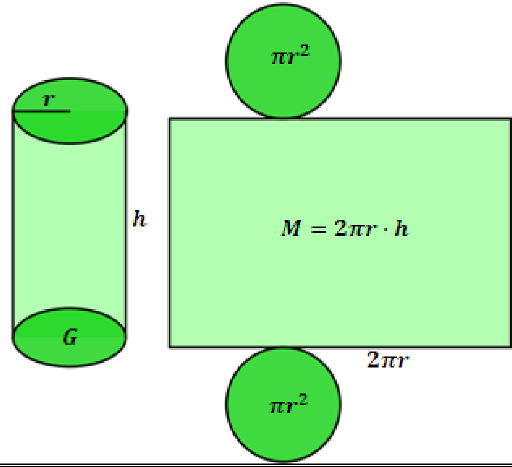
M 9.14

Prisma und Zylinder

Prisma



Zylinder



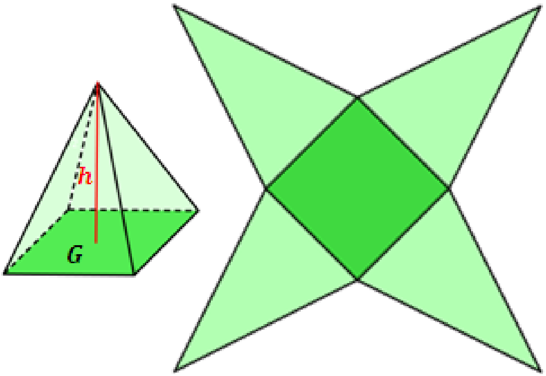
Volumen:	$\boldsymbol{V = Grundfläche \cdot Höhe}$
Oberfläche:	$\boldsymbol{O = 2G + M}$

$V_{Prisma} = G \cdot h$	$V_{Zylinder} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $O_{Zylinder} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

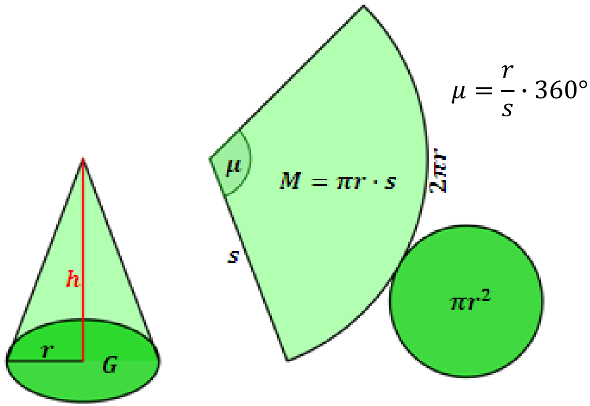
M 9.15

Pyramide und Kegel

Pyramide



Kegel



Volumen: $\boldsymbol{V = \frac{1}{3} \cdot Grundfläche \cdot Höhe}$

Oberfläche: $\boldsymbol{O = G + M}$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$	$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ $O_{Kegel} = \pi r^2 + \pi r \cdot s$